26/2/2018
ΓΡΑΦΕΙΟ 409β
ΩΡΕΣ ΓΡΑΦΕΙΟΥ : ΤΕΤΑΡΤΗ 4-5.
Μπελλημιάννης: Μια εισαγωγή στη βασική Άλγεβρα, Κάλλιπος
Μπελλημιάννης: Ασκήσεις Βασικής Άλγεβρας Κάλλιπος.
+ υλικό στην ιστοσελίδα του κ. Μπελλημιάννη.

Κύριες Έννοιες Μαθήματος:
- ΟΜΑΔΕΣ
- ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

Υπενθύμιση: Αν $\mathbb{F}$ σώμα, V διαν. χώρος επί του $\mathbb{F}$, έχουμε $+: V \times V \to V$ (π.χ. $V=\mathbb{R}^3$, $+((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$)
Εξωτερικό Γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{Z}$, $- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $-(a,b) = a-b$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $S \neq \emptyset$ ένα μη κενό σύνολο. Πράξη στο S είναι μια συνάρτηση $\phi: S \times S \to S$.
Συνήθως γράφουμε $s_1 \phi s_2$ εννοώντας $\phi(s_1, s_2)$.
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Τα τρία που είδαμε

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω ϕ πράξη στο σύνολο S. Η ϕ λέγεται ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ αν $\phi(\phi(s_1,s_2), s_3) = \phi(s_1, \phi(s_2,s_3))$ για κάθε $s_1,s_2,s_3 \in S$. Με άλλα λόγια, αν $s_1\phi(s_2\phi s_3) = (s_1\phi s_2)\phi s_3$ για κάθε $s_1,s_2,s_3 \in S$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>: Η πρόσθεση $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι προσεταιριστική, γιατί για $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε $((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) + (x_3,y_3,z_3) =$
$(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) + (x_3,y_3,z_3) = (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3, z_1+z_2+z_3)$
$= (x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3), z_1+(z_2+z_3)) =$
$(x_1,y_1,z_1) + (x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3) = (x_1,y_1,z_1) + ((x_2,y_2,z_2)+(x_3,y_3,z_3))$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: Έστω $\nu \geq 1$ και $\mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$. Τότε ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, γιατί από Γραμμική Άλγεβρα.

$(M_1 \cdot M_2) M_3 = M_1 (M_2 \cdot M_3)$ για κάθε $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$

- Ερώτηση: Είναι η αφαίρεση $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ προσεταιριστική;

$\phi(\phi(2,3), 8) = \phi(-1, 8) = -1-8 = -9$

$\phi(2, \phi(3,8)) = \phi(2, -5) = 2-(-5) = 7 \neq -9$

άρα η ϕ δεν είναι προσεταιριστική.

- Παράδειγμα: Είναι το εξωτερικό γινόμενο $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ προσεταιριστικό;

Απάντηση:

Έστω $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

Τότε $(e_1 \times e_1) \times e_2 = (0,0,0) \times e_2 = (0,0,0)$

ενώ $e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2 \neq (0,0,0)$

$e_1 \times e_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $e_1 \times e_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

άρα $\times$ όχι προσεταιριστικό.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ϕ πράξη στο σύνολο S. Η ϕ λέγεται μεταθετική αν $s_1 \phi s_2 = s_2 \phi s_1$ για κάθε $s_1, s_2 \in S$
(Δηλ. αν $\phi(s_1, s_2) = \phi(s_2, s_1)$ για κάθε $s_1, s_2 \in S$)

Παράδειγμα: $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{R}^{\nu \times \nu}, +)$
$(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ μεταθετικές πράξεις.

Παράδειγμα: Είναι το εξωτερικό γινόμενο $\times: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μεταθετικό;

Όχι, γιατί $e_1 \times e_2 = e_3$
$e_2 \times e_1 = -e_3$

Παράδειγμα: Είναι το $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ μεταθετικό
ΟΧΙ, Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Τότε

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ϕ πράξη στο σύνολο S. Έστω $e \in S$. Το e λέγεται ουδέτερο στοιχείο της ϕ αν $\phi(s,e)=s$ και $\phi(e,s)=s$ για κάθε $s \in S$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το $0 \in (\mathbb{R},+)$ ουδέτερο, Ομοίως το $0 \in (\mathbb{Z},+)$ $1 \in (\mathbb{R},\cdot)$, $1 \in (\mathbb{Z},\cdot)$. Επίσης, ο ταυτοτικός πίνακας $I_v = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{v\times v}$ είναι ουδέτερο στοιχείο του $(\mathbb{R}^{v\times v}, \cdot)$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in \mathbb{R}^3$ για το εξωτερικό γινόμενο $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

Θα βρούμε αντίφαση

ΟΧΙ Αποδ. Έστω ότι το $e \in \mathbb{R}^3$ είναι ουδέτερο. Αφού $(0,0,0)\times v = (0,0,0)$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$ έχουμε $e \neq (0,0,0)$. Τώρα e ουδέτερο $\Rightarrow e\times e = e$. Αλλά $e \times e = (0,0,0)$. Άρα $e=(0,0,0)$ αντίφαση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω S = σύνολο άρτιων ακεραίων με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Έχει το $(S,\cdot)$ ουδέτερο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ο $e \in S$ ουδέτερο. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $e = 2k$. Τότε $e \cdot e = e$ (*) (αφού e ουδέτερο) Άρα $(2k)\cdot(2k) = 2k$
$\Rightarrow 4k^2 = 2k \Rightarrow 2k(2k-1) = 0$. (στο $\mathbb{R}$).
Έχουμε $2k-1 \neq 0$, γιατί $k \in \mathbb{Z}$. Άρα (*) $\Rightarrow k = 0$
Επομένως $e = 2\cdot 0 = 0$ Αλλά $0 \cdot 2 = 0 \neq 2$ αντίφαση.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Έστω (S,ϕ) σύνολο με πράξη. Υποθέτουμε $e, e' \in S$ ουδέτερα για την ϕ. Ισχύει $e = e'$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ναι

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$e \underset{\text{γιατί } e' \text{ ουδέτερο}}{=} \phi(e,e') \underset{\text{γιατί } e \text{ ουδέτερο}}{=} e'$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ότι αν $M_1, M_2 \in S$ τότε $M_1 . M_2 \in S$
γιατί $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & bb' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$

Άρα $(S, \cdot)$ σύνολο με πράξη

Έστω $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ α) E όχι ουδέτερο στοιχείο του S
β) $E \cdot M = M$ για κάθε $M \in S$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα E όχι ουδέτερο στο S.

β) Έστω $M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε $E \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2. Το $(S, \cdot)$ δεν έχει ουδέτερο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω F ουδέτερο. Τότε $E = E \cdot F$
γιατί F ουδέτερο. Αλλά από Ισχυρισμό 1 β)
$E \cdot F = F$ άρα $E = F$ αντίφαση στον Ισχυρισμό 1 α)

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω (S, ϕ) πράξη η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο $e \in S$. Έστω $s \in S$. Το $s' \in S$ λέγεται αντίστροφο του s (ως προς την πράξη ϕ)
αν $\phi(s, s') = e$ και $\phi(s', s) = e$
Αν υπάρχει τέτοιο s', λέμε ότι το s έχει αντίστροφο στο S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Το $(\mathbb{R}, +)$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $0_{\mathbb{R}}$ και αν $a \in \mathbb{R}$, το αντίστροφο του ως προς την $+$ είναι το $-a$. Ομοίως για τα $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $v \geq 1$. Το $(\mathbb{R}^{v \times v}, +)$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$. Ο A έχει ανάθετο το $-A$.

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ</u> Αν το $s \in S$ έχει αντίστροφο s' είναι το s' μοναδικό;

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω (S, ϕ) ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ πράξη με ουδέτερο $e \in S$. Υποθέτουμε ότι το $s \in S$ έχει αντίστροφα s' και s''. Τότε $s' = s''$
(Άρα το αντίστροφο του s είναι μοναδικό και θα το συμβολίζουμε s^{-1} (ή $-s$) ανάλογα με το πως γράφουμε την πράξη.)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

γιατί s'' αντίστροφο του s

$$s' = \phi(e, s') = \phi(\phi(s'', s), s')$$
$$= \phi(s'', \phi(s, s')) = \phi(s'', e) = s''$$

προσεταιριστικότητα

γιατί s' αντίστροφο του

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Έστω $\nu = 2$. Θεωρούμε την πράξη $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$. Ο ταυτοτικός $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ουδέτερο. Έστω $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Πότε ο A αντιστρέφεται; <u>Απάντηση</u>: από γρ. άλγεβρα ο A αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det A \neq 0$, δηλ. αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0$
Πιο γενικά, θεωρούμε $\nu \geq 1$ και την πράξη $(\mathbb{R}^{\nu\times\nu}, \cdot)$ δηλ. τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Ο ταυτοτικός $\nu\times\nu$ πίνακας $I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ουδέτερο στοιχείο. Από γρ. άλγεβρα ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Θεωρούμε την πράξη $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Το $1_{\mathbb{Z}}$ είναι ουδέτερο στοιχείο. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Πότε το k αντιστρέφεται;
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Το $k \in (\mathbb{Z}, \cdot)$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν $k = 1$ ή $k = -1$.

Απόδειξη

Αν $k=1$ φανερά κ' αντιστρέφεται με αντίστροφο το 1

Αν $k=-1$ » » » » το -1

Έστω $k\in\mathbb{Z}$ με $k\notin\{1,-1\}$. Θα δείξουμε ότι k δεν αντιστρέφεται. Υποθέτουμε $\lambda\in\mathbb{Z}$ με $k\lambda=1$ και $\lambda k=1$

Προφανώς $k\neq 0$ και $|k\lambda| = |1| = 1 \Rightarrow |k|\cdot|\lambda| = 1$
Φανερά $\lambda\neq 0$. Άρα $\lambda\in\mathbb{Z}$ και $\lambda\neq 0 \Rightarrow |\lambda|\geq 1$. Ομοίως $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0 \Rightarrow |k|\geq 1$. Αφού $k\neq 1$ και $k\neq -1$, $|k|\geq 2$.

Άρα $\left.\begin{matrix}|k|\geq 2\\ |\lambda|\geq 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow |k|\cdot|\lambda|\geq 2$ αντίφαση στο $|k|\,|\lambda|=1$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Έστω $(S,\phi)=(\mathbb{Q},\cdot)$ ή $(S,\phi)=(\mathbb{R},\cdot)$ και $a\in S$. Τότε a αντιστρέφεται αν και μόνο αν $a\neq 0$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω (S,ϕ) σύνολο με πράξη. Το ζεύγος (S,ϕ) λέγεται <u>ομάδα</u> (group) αν: η ϕ είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο του S αντιστρέφεται.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Από τις παραπάνω προτάσεις το ουδέτερο στοιχείο της S είναι μοναδικό. Επιπλέον, αν $s\in S$ το αντίστροφο του s στο S είναι μοναδικό και συμβολίζεται s^{-1}.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Μια ομάδα μπορεί να είναι μεταθετική ή μπορεί να μην είναι

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Αν (S,ϕ) ομάδα, η (S,ϕ) λέγεται μεταθετική (ή αβελιανή) ομάδα αν η ϕ είναι μεταθετική

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ μεταθετικές ομάδες. Το ίδιο το $(\{1_{\mathbb{R}},-1_{\mathbb{R}}\},\cdot)$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Έστω $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{ a \in \mathbb{Z}, \text{ με } a \geq 0 \}$

Παρατηρούμε ότι αν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ τότε και $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Άρα $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$ πράξη. Είναι το $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$ ομάδα; Όχι, η πράξη είναι προσεταιριστική (σαν περιορισμός προσεταιριστικής συνάρτησης) και έχει ουδέτερο το 0. Όμως αν $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $a > 0$ το a δεν έχει αντίστροφο στο $\mathbb{Z}_{\geq 0}$

(Απόδειξη. Έστω ότι είχε αντίστροφο το $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Τότε $a + b = 0$ αλλά $\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b > 0$ άρα $0 > 0$ αντίφαση)